

Thiendou Diack, El Hadji Malick Dia et Cissé Bâ

ÉTUDE DESCRIPTIVE DE L'HISTORIQUE DES TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES DANS LES PROGRAMMES DE MATHÉMATIQUES AU SÉNÉGAL

Résumé

L'étude des transformations géométriques occupe une place importante dans l'enseignement des mathématiques, plus particulièrement dans les séries scientifiques. Au Sénégal, le constat est qu'elles sont souvent insuffisamment prises en charge dans le savoir enseigné. Ainsi, une analyse fine du programme de mathématiques sénégalais s'impose pour voir la place qu'occupent les transformations géométriques dans l'enseignement des mathématiques. Cette étude a permis de déterminer les habitats et les niches des transformations géométriques dans les différentes réformes des programmes de mathématiques.

Mots clés : transformations géométriques, programme de mathématiques, écologie des savoirs, habitat, niche.

Abstract

The study of geometric transformations occupies an important place in the teaching of mathematics, particularly in the scientific series. In Senegal, the observation is that they are often insufficiently taken care of in the knowledge taught. Thus, a detailed analysis of the Senegalese Mathematics program is necessary to see the place occupied by geometric transformations in the teaching of Mathematics. This study has made it possible to determine the habitats and niches of geometric transformations in the various reforms of the mathematics programs.

Key words: geometric transformations, mathematics program, ecology of knowledge, habitat, nest.

Introduction

Au Sénégal, même si les transformations occupent une place prépondérante dans les programmes d'enseignement des séries scientifiques, le constat est qu'elles sont souvent insuffisamment prises en charge dans le savoir enseigné particulièrement en classe de première S2¹. Mais, on sait que ce choix est souvent source de difficultés en terminale S2 quand le professeur aborde l'étude des similitudes directes.

Il s'y ajoute que, dans la géométrie comme dans la vie courante, les transformations sont perçues comme des outils qui permettent, grâce à leurs propriétés, de découvrir ou bien de démontrer les propriétés des objets géométriques du plan et de l'espace. Mais aussi de créer des objets présentant certaines régularités (frises, rosaces, tapisseries, ...). Et enfin de classer des objets du plan ou de l'espace (cristallographie).

Ces constats nous ont amené à faire un travail d'analyse des programmes au Sénégal sur les transformations géométriques dans les séries scientifiques de 1960 à nos jours.

Dans les lignes qui suivent, après avoir dégagé la problématique et le cadre théorique, nous donnons un bref aperçu historique et épistémologique des transformations. Par la suite, nous faisons une analyse de l'évolution des programmes des séries scientifiques à propos de cet objet de savoir qui a marqué les différentes réformes de 1960 à nos jours.

1. Problématique

La notion de transformation géométrique a eu plusieurs conceptions depuis les arabes du moyen-âge jusqu'à la renaissance avec la perspective Vittori (2009). Ces conceptions ont connu plusieurs mutations passant du cadre algébrique au cadre géométrique et inversement.

Ainsi, au fil du temps, plusieurs travaux de recherche ont été réalisés dans le cadre de l'étude des transformations géométriques. Grenier (1988) évoque les possibilités sur l'élaboration de problèmes susceptibles de remettre en question les conceptions erronées sur la symétrie orthogonale par exemple. Thienard (2006) a montré que les transformations géométriques ont été considérées sous trois aspects apportant des solutions à trois problématiques étrangères les unes des autres qu'il convient de bien discerner pour leur enseignement. Il a mis en évidence le cadre de la géométrie des figures (théorie des coniques), la problématique de la refondation de la géométrie élémentaire et la notion de groupe de transformations pour la hiérarchisation des géométries Klein (1872). Sangaré (2006) a illustré la notion de marque

¹ Ancienne Série D : sciences expérimentales

comme un objet de géométrie auxiliaire opératoire sur les transformations de figures géométriques.

Pour notre part, nous nous intéressons à la place des transformations dans les programmes sénégalais ainsi qu'au rôle qui leur est assigné dans l'enseignement des mathématiques et particulièrement dans l'enseignement de la géométrie.

Dans ce texte, il s'agit de faire une analyse des programmes sénégalais des séries scientifiques de 1960 à nos jours suivant les différentes périodes liées aux grandes réformes de l'enseignement des mathématiques : de 1960 à 1971 ; de 1972 à 1985 et de 1986 à nos jours.

2. Cadre théorique et méthodologie

Du point de vue théorique de l'analyse, nous nous situons dans une perspective écologique, c'est-à-dire que nous identifions l'évolution de l'habitat et des niches des transformations géométriques, selon les termes définis par Chevallard (1994) dans son approche de l'écologie didactique des savoirs :

« Les écologistes distinguent, s'agissant d'un organisme, son habitat et sa niche. Pour le dire en un langage volontairement anthropomorphe, l'habitat, c'est en quelque sorte l'adresse, le lieu de résidence de l'organisme. La niche, ce sont les fonctions que l'organisme y remplit : c'est en quelque façon la profession qu'il y exerce. » (Op. cité, p. 142)

En d'autres termes, *l'habitat* est le lieu où l'on peut trouver tel objet mathématique et les objets avec qui il entre en association. *La niche* est relative à la fonction occupée par l'objet. Tandis que *l'écosystème* est un "lieu" réunissant les conditions écologiques où un objet peut vivre, il est défini comme un système d'êtres et de relations.

À la suite de Chevallard (1994), Artaud (1997) montre alors comment un objet émerge et peut vivre dans un écosystème didactique. Cette dimension écologique permet de questionner les objets mathématiques.

« La problématique écologique se présente, d'emblée, comme un moyen de questionner le réel. Qu'est ce qui existe, et pourquoi ? Mais aussi, qu'est-ce qui n'existe pas, et pourquoi ? Et qu'est-ce qui pourrait exister ? Sous quelles conditions ? Inversement, étant donné un ensemble de conditions, quels objets sont-ils poussés à vivre, ou au contraire sont-ils empêchés de vivre dans ces conditions ? » (Artaud, 1997, p. 99)

L'analyse écologique vise ainsi, à nous permettre de mettre à jour un réseau de conditions et de contraintes qui vont déterminer la place que peuvent occuper les transformations géométriques en mathématiques. Pour ce faire,

nous allons décrire leur évolution au cours des différentes réformes qui ont marqué les programmes de mathématiques au Sénégal.

3. Quelques travaux comme aperçu historique sur les transformations géométriques

La notion de transformation est apparue très tôt dans l'histoire des mathématiques, même si c'est de façon embryonnaire.

- Les éléments de géométrie d'Euclide

Dans Peyrard (1804), les transformations géométriques apparaissent de manière sous-jacente à travers les demandes, notions communes et propositions.

Dans le livre 1, on peut citer trois endroits où apparaît ce principe :

Notion commune 7 :

Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles. (p. 05)

Demande 4 :

Et que tous les angles droits soient égaux entre eux. (p. 05)

Proposition 4 :

Si deux triangles ont des côtés égaux chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent. (p. 10)

Ce principe de superposition connaîtra son succès tout au long de l'histoire. La notion de coïncidence sera associée à la notion de mouvement et celle de déplacement apparaîtra alors comme une abstraction de la notion de mouvement. La transformation géométrique, vue au sens physique, exprimera la relation statique entre la position initiale et la position finale, en se situant à la charnière entre la géométrie et la mécanique.

- Les travaux de Desargues

Girard Desargues² peut être considéré comme le fondateur des transformations du plan au XV^{ème} siècle. En effet, suite à l'émergence des techniques de perspective, il se démarque de la tradition euclidienne et crée la « démonstration par le relief », c'est-à-dire par la perspective. Il utilise alors des considérations de géométrie dans l'espace pour établir des propriétés de géométrie plane. Il crée la « méthode des transformations » Taton (1949) qui consiste à démontrer une propriété sur une configuration complexe (une

² Géomètre, Architecte et ingénieur lyonnais (1591-1661)

conique quelconque) en la démontrant tout d'abord sur une configuration simple (le cercle) et en la transportant du cercle à la conique par perspective ou projection.

Pascal et De La Hire généralisent les méthodes de Desargues et utilisent les transformations comme transfert de propriétés d'une configuration à une autre dans le cadre de la théorie des coniques. Newton utilise cette méthode pour simplifier certains problèmes liés aux coniques : changer des figures en des figures du même genre, à chaque point "M" de la figure, on construit un point "M'" qui lui correspond. Ainsi, si "M" parcourt d'un mouvement continu la première figure, le point "M'" parcourra de même, par un mouvement continu tous les points de la nouvelle figure.

- **L'apport de Descartes**

Au début du XVII^{ème} siècle, Descartes (1637) va développer une nouvelle façon de résoudre les problèmes de géométrie dans son livre « *la Géométrie* ». En effet, à la suite du calcul littéral développé par Viète à la fin du XVI^{ème} siècle, Descartes (1637) introduit le formalisme algébrique pour résoudre des problèmes géométriques. Apparaissent alors les notions de repère, équations de droites, etc. C'est la naissance de la géométrie analytique. Le plan sera considéré comme un ensemble de points avec des coordonnées.

On assiste alors à un changement de point de vue. C'est-à-dire, le passage du global au ponctuel.

Une transformation géométrique plane n'est plus vue comme une action sur des figures planes mais plutôt sur les points du plan. Plus précisément, elles deviennent des bijections du plan dans lui-même.

- **Le programme d'Erlangen**

Au début de l'année 1870, une nouvelle conception de la géométrie émerge, dans laquelle la notion de transformation occupe une place centrale et sera dotée d'un nouveau statut. Les travaux de Riemann et de Helmholtz ainsi que ceux de Galois et de Jordan sur la théorie des groupes eurent pour postérité immédiate ceux de Lie et de Klein (1872). Klein imposa, à l'issue d'une synthèse originale et novatrice, le point de vue selon lequel toute géométrie est caractérisée par un groupe de transformations. Son œuvre déterminante est connue sous le nom de « *Programme d'Erlangen* ».

Klein (1872) commença par caractériser les propriétés qui font l'objet de la géométrie élémentaire par un groupe de transformations, le groupe principal.

- **La synthèse de David Hilbert**

Au début du XX^e siècle, David Hilbert³ développa un large éventail d'idées fondamentales telles que l'axiomatisation complète de la géométrie. Dans

³ Mathématicien allemand (1862,1943)

« *Les fondements de la géométrie* » (1899), il développa l'aspect analytique des transformations ; ce qui facilite leurs manipulations dans la résolution des problèmes géométriques.

Ce bref aperçu historique nous a permis d'entrevoir le processus qui a permis d'arriver à ce niveau de maturation du concept de transformation qui a été développé dans différents cadres du géométrique à l'analytique en passant par l'algébrique.

4. Analyse des programmes

Dans cette partie, nous allons procéder par périodes liées aux grandes réformes des programmes de mathématiques au Sénégal en l'occurrence la période de 1960 à 1971, celle de 1972 à 1985 et enfin de 1986 à nos jours.

4.1. Au lendemain des indépendances (1960 à 1971)

Juste après son indépendance, l'état du Sénégal ne disposant pas encore de son propre programme scolaire, était obligé d'appliquer intégralement les programmes français Coly (2004). Le Sénégal qui abritait la capitale de l'Afrique Occidentale Française (AOF), disposait déjà de plusieurs établissements scolaires (Lycée Faidherbe, Lycée Van Vollenhoven, ...) construits par les français où le programme français était souvent enseigné par des français.

Pendant cette période, les transformations géométriques qui étaient dans un habitat purement géométrique commencent à migrer vers un habitat algébrique.

Dans son livre : « problèmes de constructions géométriques », J. Petersen met en évidence une classe de problèmes (environs 400), les constructions géométriques et les recherches de lieux géométriques, pour lesquels translation, rotation, homothétie, inversion,... trouvent un vaste champ d'application où elles s'avèrent très efficaces. Les exemples développés par J. Petersen seront la mine dans laquelle les auteurs de livres d'enseignement iront puiser leurs exercices sur le sujet jusqu'aux années 1970, qui marqueront la quasi disparition de l'enseignement de la géométrie « pure ». (Thienard, 2006)

Ainsi, les transformations opéraient sur les figures. Klein (1872) renouvelle ce point de vue en faisant opérer les transformations sur la totalité de l'espace. Il remarque alors que les déplacements de l'espace, les similitudes, les symétries et leurs composées, sont les transformations projectives conservant l'ombilicale, conique à l'infini appartenant à toutes les sphères ; ce qui permet de définir la géométrie élémentaire comme l'étude des propriétés des invariants par les transformations projectives conservant l'ombilicale (ce que Chasles considère comme le groupe des similitudes).

Ainsi, avec le programme d'Erlangen de Klein (1872), retenons d'abord la place centrale de la notion d'invariant ; mais aussi la notion de l'espace comme objet géométrique. Klein (1872) achève ainsi la genèse d'une notion qui s'est dégagée des travaux sur la perspective d'une part et sur la mécanique d'autre part.

Dans ce cadre, on comprend que l'habitat des transformations était dans l'algèbre et leur niche dans la théorie des groupes.

4.2. La première réforme des programmes au Sénégal (1972-1985)

a) Contexte

C'est dans le décret numéro 72-861 du 13 Juillet 1972 portant organisation de l'enseignement moyen-secondaire du Sénégal qu'on trouve pour la première fois un programme d'enseignement dans le Sénégal post-indépendant. Ce programme inspiré du programme français d'alors très théorique et très axiomatique, laissait une grande place à la théorie des ensembles et aux structures algébriques. C'est ce qu'on a communément appelé la période des « mathématiques modernes ».

b) Une définition théorique et une arrivée tardive des transformations dans les programmes.

Dans la réforme de 1972, aucune place n'était réservée aux transformations géométriques pour les classes de sixième⁴ et de cinquième. C'est seulement à partir de la quatrième que l'on définit pour la première fois, une transformation⁵ qui est la projection de direction donnée. Toujours, dans cette même optique, on introduit la symétrie centrale. Un an après, dans le programme de troisième, on introduit la projection orthogonale sur une droite et le rapport de projection orthogonale d'un axe sur un axe. Ensuite, on définit les isométries du plan euclidien par « *les bijections du plan euclidien sur lui-même qui conservent les distances* ».

L'introduction de la notion de groupe des isométries permet de définir un angle géométrique comme classe d'équivalence de couples de demi-droites isométriques de même origine.

A partir de la classe de seconde, on définit les homothéties vectorielles et les projections vectorielles. Ensuite, à partir de la projection orthogonale sur une droite, on aborde la notion de produit scalaire de deux vecteurs (forme bilinéaire, symétrie, définie positive). Dans le chapitre dénommé « applications affines d'un espace affine » on introduit et on utilise le groupe des homothéties et translations.

⁴ Première année au collège

⁵ Une transformation étant ici considérée comme une application du plan dans lui-même.

Dans la partie géométrie métrique plane, l'orthogonalité de deux droites est défini comme une relation symétrique compatible avec le parallélisme. Ensuite il y a l'exploitation de l'invariance par translation et le rapport de la projection orthogonale d'une droite orientée sur une autre.

En premières C et D, il y a la définition de la rotation vectorielle mais aussi celle de la composée de deux rotations vectorielles. A la fin de cette partie, on introduit le groupe des rotations vectorielles.

Dans le programme de terminale C, on introduit le groupe linéaire des homothéties vectorielles, des exemples de projection parallèle sur un sous espace affine, les involutions affines et leurs points fixes ainsi que la translation et l'homothétie.

Dans le plan vectoriel et dans l'espace vectoriel de dimension trois, on insiste sur les éléments fixes des transformations orthogonales involutives (symétrie). On étudie aussi les rotations vectorielles de l'espace vectoriel euclidien de dimension trois et de là, on définit une telle rotation soit par l'identité, soit par une transformation orthogonale qui a pour seuls éléments fixes ceux d'une droite vectorielle. On introduit aussi le groupe des rotations vectorielles et l'orientation de l'espace.

Enfin, on traite des exemples simples de groupe d'isométries laissant invariant un ensemble donné avant de terminer par le groupe des similitudes du plan et les sous-groupes remarquables.

Dans le programme de terminale D, dans la partie Géométrie Vectorielle, on donne une interprétation géométrique de l'application : $z \mapsto az + b$, où z est une variable complexe. Cette interprétation aboutit à l'identité, une rotation, une homothétie, une translation, ainsi qu'à leurs composées qui donnent une similitude plane directe. Une conséquence de cette analyse est qu'il n'y a pas un chapitre spécifique dédié aux transformations mais leur utilisation se fait de manière transversale dans tout le programme.

Nous remarquons que le programme de mathématiques du second cycle de la réforme de 1972 avait réservé une grande partie aux transformations géométriques, sous toutes ses formes. Mais toutes les études des transformations géométriques aboutissaient aux groupes de transformations (groupes des isométries, groupe des similitudes, ...) ce qui donnait plus d'importance à l'étude de l'algèbre et des structures algébriques dans la géométrie. Ainsi, la niche des transformations migre petit à petit vers une étude plus représentative des groupes.

On peut noter aussi que les transformations sont utilisées en analyse pour la représentation graphique des fonctions associées à des fonctions simples. Pendant cette période, les habitats des transformations géométriques se retrouvent aussi bien en algèbre qu'en analyse.

4.3. La contre-réforme (1986-1997)

C'est la période de la contre-réforme de la réforme des mathématiques modernes, c'est pourquoi, on revient alors à des mathématiques moins « formelles », où les liens avec les autres disciplines telles que la physique sont vues sous un jour nouveau. Notons qu'il y a une nette évolution de l'écriture et de la présentation des programmes déclinés d'abord sous forme de thèmes, de chapitres et de travaux pratiques, ensuite en termes de contenus, commentaires et compétences exigibles. C'est à cette période précisément en 1997, qu'un changement de dénominations des séries est opéré. Les séries scientifiques et techniques C, D et E deviennent respectivement S1, S2 et S3.

Dans les programmes de terminales, il y a une partie relative aux transformations et configurations. On y traite les isométries (bijections conservant les distances), les déplacements (isométries conservant les angles orientés), l'action des isométries sur les vecteurs du plan et les similitudes planes directes. Cette partie s'achève par des travaux pratiques sur :

- des exemples d'emploi de transformations planes pour l'étude des configurations et de la détermination de lieux géométriques ;
- des exemples d'études des isométries laissant invariant une configuration du plan ;
- un exemple de transformation définie par une application complexe $z \mapsto f(z)$;
- des exemples simples de composées de rotations.

En revanche, dans les séries orientées vers les sciences expérimentales, les transformations ne sont abordées que dans le cadre strictement algébrique des nombres complexes. On y traite des exemples d'étude d'applications

$$z \mapsto f(z).$$

Pendant toute cette période, l'habitat des transformations se retrouve entre l'algèbre et la géométrie tandis que les niches sont dans la représentation graphique des fonctions associées en analyse et la construction géométrique des figures planes. « *Il s'agit d'utiliser des transformations pour construire les représentations graphiques des fonctions associées à f à partir de la représentation de f* » (Programme de mathématiques 1997.)

Nous pouvons noter qu'il y a une grande différence entre la réforme des mathématiques modernes et de la contre-réforme. Une illustration de ce fait est que les transformations géométriques quittent l'habitat algébrique pour migrer vers un habitat géométrique. Ainsi, toute notion de groupe de transformations a complètement disparu des programmes ; il n'y a plus de groupes des rotations, des isométries ou même des similitudes. La projection a disparu des programmes sauf dans les séries S1 et S3. Donc ici l'habitat algébrique disparaît au profit d'un habitat géométrique.

4.4. Une consolidation de la contre-réforme (Les programmes 1998-2000)

C'est la période de consolidation de la contre-réforme, l'élève est mis au cœur du système d'enseignement-apprentissage, mais les programmes ne changent pas fondamentalement. En effet, il est stipulé dans l'introduction de ces programmes que l'élève est responsable au premier chef de son apprentissage. Ici, nous remarquons qu'il n'y a relativement pas de différence entre les programmes de 1997 et les programmes de 2000 en ce qui concerne les transformations. Les habitats et niches des transformations restent ainsi inchangés.

4.5. Migration vers un habitat analytique des transformations (les programmes de 2006)

Dans le souci d'améliorer les enseignements apprentissages des mathématiques, des révisions pour une meilleure lisibilité des programmes n'ont cessé d'être mises en œuvre. C'est ainsi qu'en 2006 de nouveaux programmes de mathématiques voient le jour. Notons que ces programmes sont toujours en vigueur pour l'enseignement des mathématiques. Dans ces programmes, les transformations font leur entrée dès la sixième avec la symétrie orthogonale qui sera « *introduite par le pliage ou par tout autre moyen pouvant aider l'élève à se faire une approche intuitive de la notion.* » (CNM, 2006, pp 27).

L'outil des transformations permet, dès la sixième, à :

- reconnaître deux figures symétriques par rapport à une droite ;
- reconnaître dans une figure codée deux points symétriques par rapport à une droite donnée ;
- construire le symétrique d'un point par rapport à une droite donnée à l'aide de la règle et l'équerre ou bien du compas ;
- construire le symétrique d'un segment, d'une droite, d'une demi-droite, d'un cercle,...
- utiliser les propriétés de l'axe de symétrie pour des constructions ;
- reconnaître qu'une droite donnée est un axe de symétrie d'une figure ;
- construire, quand il existe, un axe de symétrie d'une figure simple ;
- utiliser ces propriétés pour reconnaître deux segments de même longueur, mais aussi le milieu d'un segment ou bien des points alignés.

Le programme met en évidence le fait qu'un triangle qui a un axe de symétrie est un triangle isocèle. Un triangle qui a trois axes de symétrie, donc trois angles de même mesure est un triangle équilatéral. Mieux un triangle qui a deux axes de symétrie est un triangle équilatéral. C'est ce qui permet à l'élève de reconnaître facilement un triangle isocèle ou équilatéral. En classe de

cinquième, les élèves arrivent à construire le symétrique d'un point, d'une figure simple et à trouver des centres de symétrie éventuels. C'est à partir de la quatrième que l'élève commence à rencontrer des transformations (translation et rotation) différentes des symétries. Enfin en classe de troisième, il y a un chapitre entier réservé aux transformations bien que l'on ne définit pas de nouvelles transformations. Dès la classe de seconde, le programme stipule que la pratique de la géométrie doit contribuer à développer le sens de l'observation et du raisonnement et à donner une bonne vision des objets du plan et de l'espace. En géométrie plane, l'objectif essentiel du programme est d'utiliser des outils vectoriels, analytiques, métriques et des transformations. Ainsi, en seconde, le chapitre V intitulé : « TRANSFORMATIONS » rappelle toutes les transformations vues au collège et introduit de nouvelles telles que l'homothétie, la composition des transformations (cette fois ci avec la loi "o": $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ amorcée depuis la troisième avec deux symétries successives et deux translations successives) ainsi que l'étude de quelques exemples de lieux géométriques. Ainsi, l'élève de seconde sera capable de bien manipuler les transformations en ayant la capacité de connaître et reconnaître les configurations liées aux propriétés des transformations étudiées concernant :

- les distances, l'alignement ;
- le milieu, le parallélisme, l'orthogonalité, l'intersection ;
- la détermination d'une homothétie par le centre, un point et son image ou deux points et leurs images ;
- la détermination analytique d'une translation, d'une symétrie centrale et d'une homothétie ;
- enfin la connaissance et l'utilisation des propriétés des transformations étudiées pour :
 - ✓ démontrer : l'égalité de longueurs, l'égalité de mesures d'angles, l'alignement de points, le parallélisme de droites et l'orthogonalité de droites ;
 - ✓ justifier une construction ;
 - ✓ construire une figure ;
 - ✓ déterminer des lieux géométriques.

Ainsi, c'est à partir de la seconde que les expressions analytiques des transformations font leur entrée dans le programme.

En premières S2 et S4 (Sciences Expérimentales) bien que les transformations (symétrie axiale, symétrie centrale, translation,...) soient des outils géométriques, elles seront utilisées en analyse plus particulièrement dans la représentation graphique des fonctions associées (exemple : $x \mapsto f(|x|)$). L'élève de première doit connaître les propriétés essentielles des

transformations et doit savoir les mettre en œuvre dans des configurations simples. L'accent sera mis sur l'aspect méthodologique dans la résolution des problèmes. Ici, le programme insiste sur les expressions analytiques d'une translation, d'une rotation, d'une symétrie et d'une homothétie mais aussi on traite des exemples d'isométries laissant au moins un point invariant. En premières S1 et S3, on commence d'abord par consolider les acquis de la classe de seconde, ensuite à étudier les propriétés des isométries, à les composer et décomposer en composées de symétries orthogonales et enfin on introduit les notions de déplacement et d'antidéplacement. On utilise aussi les critères d'isométrie des triangles dans des résolutions de problèmes et les réciproques de transformations usuelles sont abordées. Les classes de Terminales S2 et S4 sont des classes à vocation scientifique tournées vers les sciences expérimentales. En conséquence, l'analyse et la gestion des données y prennent une place prépondérante. Néanmoins, il y a une partie *algèbre et géométrie* qui est réservée aux nombres complexes et aux transformations. Dans cette partie, les transformations sont abordées sous un nouveau jour avec l'introduction de la similitude plane directe dans le plan complexe. L'utilisation des transformations est alors multiple : elles permettront par exemple à l'élève de la Terminales S2 et S4 de déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe et de résoudre des problèmes y afférents. Dans le programme de Terminales S1 et S3, un seul chapitre, intitulé « similitudes planes directes » porte sur les transformations : les similitudes sont étudiées géométriquement et en utilisant les nombres complexes. Cette étude permet entre autre de :

- déterminer l'image d'une figure simple par une similitude ;
- déterminer une similitude et ses éléments caractéristiques ;
- étudier une similitude donnée par son expression complexe ;
- décomposer une similitude ;
- utiliser une les critères de similitudes de triangles dans des résolutions de problèmes.

En revanche, l'utilisation des transformations se fait de manière transversale tout le long du programme. Par exemple en géométrie plane on utilise les isométries :

« 2) géométrie plane

[...] *Rappels et compléments sur les isométries...* » (Programme de mathématiques 2006 ; p 67).

En conclusion, on remarque que dans le cycle moyen, les transformations apparaissent à tous les niveaux de la sixième à la troisième. Elles permettent à l'élève dès la sixième de commencer à voir les symétries et les similitudes dans les figures géométriques voire dans les objets qui l'entourent. A ce niveau, l'accent est mis sur le « transformé » et non sur l'application elle-même. Au fur et à mesure les transformations définies comme des

applications du plan dans lui-même, vont passer d'actions sur les figures à des actions sur les points. A partir de la troisième, le concept de transformation se précise, on commence alors à introduire la notion de composition de transformations sans le formalisme lié à la loi "o" (*c'est par exemple quand on parle de transformation résultant de deux symétries orthogonales successives ou bien de deux translations successives*). Par ailleurs, on remarque que les transformations nous permettent de démontrer beaucoup de résultats (le *parallélisme et l'orthogonalité de droites ; la comparaison des longueurs, des aires ; l'alignement de points,...*). Ainsi l'élève de troisième est bien préparé et bien outillé en transformations pour entrer au lycée où les notions commencent à devenir de plus en plus abstraites. Nous constatons aussi que dans les programmes actuels que les transformations occupent une place primordiale dans chaque niveau de la sixième à la terminale. L'habitat demeure toujours géométrique avec des niches dans la représentation graphique des fonctions associées en analyse, dans les changements de repères et dans la recherche de lieux géométriques.

Conclusion

Les transformations géométriques ont toujours constitué un point focal dans l'enseignement des mathématiques. Ainsi, depuis les arabes du moyen-âge jusqu'à nos jours, elles passent d'un habitat algébrique à un habitat géométrique. Les niches ont débuté avec la résolution de problèmes géométriques (théorie des coniques), ensuite ils s'élargissent dans la hiérarchisation de la géométrie Klein(1872) et enfin dans la représentation graphique des fonctions simples en analyse. Le programme de mathématiques du second cycle de la réforme des mathématiques modernes avait réservé une place importante aux transformations mais dans un cadre algébrique. En effet, toutes les études sur les transformations aboutissaient aux groupes de transformations (groupe des rotations, groupes des isométries, groupe des similitudes, ...). Ce qui donnait une importance capitale à l'étude de l'algèbre et des structures algébriques minorant ainsi la géométrie en tant qu'étude des figures. A la réforme de 1972, nous constatons que les concepteurs des programmes concevaient les transformations géométriques comme mouvement sur les figures géométriques avant d'en arriver à une définition ponctuelle de la notion de transformation. Avec la contre-réforme de 1986, on a assisté à une évolution de l'écriture et de la présentation des programmes. C'est à cette période aussi qu'il y a un changement, car les transformations géométriques quittent l'habitat algébrique pour migrer vers un habitat géométrique. Ainsi, cette étude des transformations géométriques a montré l'importance que l'on doit accorder à l'enseignement de ces objets de savoir qui n'ont cessé de basculer entre l'habitat algébrique et l'habitat géométrique dans le savoir à enseigner. La suite de ce travail serait d'analyser les manuels scolaires les plus utilisés et les pratiques de classe à propos des transformations géométriques.

Références bibliographiques

ANGLADE M., BRIEND J. Y. (2017). La notion d'Involution dans le Brouillon Project de Girard Desargues, *HAL archives ouvertes*.

ANGLADE M., BRIEND J. Y. (2018). L'usage de la combinatoire chez Girard Desargues : le cas du théorème de Ménélaüs, [*Math.HO*].

ARTAUD M., Creshto, Orleans (1997), Cours : *Introduction à l'approche Ecologique du Didactique : l'écologie des organisations mathématiques et didactiques*.

AUGUST C. (2004). Les associations de parents d'élèves à travers l'histoire de l'éducation au Sénégal, *Limoge, HAL*.

BA C. (2007). *Etude épistémologique et didactique de l'utilisation du vecteur en mathématiques et en physique – liens entre mouvement de translation et translation mathématique*. Thèse de Doctorat en didactique des mathématiques non publié, Université de Claude Bernard LYON1-UCAD.

BA C., DORIER J. L. (2006). Aperçu historique de l'évolution de l'enseignement des vecteurs en France depuis la fin du XIX^e siècle, *L'OUVERT*.

BKOUICHE R. (1991). De la Géométrie des Transformations, *repères IREM, Numéro 4*.

Cellule de Géométrie ISEP, *La géométrie des transformations*. Document non publié, CREHEH.

CHEVALLARD Y. (2007-2008) COURS, *Didactique fondamentale*.

Cours Géométrie Descriptive(1997), *Ecole d'architecture de NANCY*.

GRENIER D. (1988). Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième, *Université Josèphe Fourier, Grenoble 1*.

HOUEMENT C., KOUZNIAK A. (2006). Paradigmes géométriques et Enseignement de la Géométrie, *IREM Strasbourg, volume 11, pp 175-193*.

KLEIN F. (1872), *Programme d'Erlangen*.

PEYRARD F. (1804). *Les éléments de géométrie d'Euclide, Vol 1, Trad. B. Bitrac, Paris, puf*.

SANGARE M. S. (2006), La marque d'une transformation géométrique : un exemple de modélisation didactique, *EDIMATH*.

TATON R. (1949). La préhistoire de la géométrie moderne, *Revue des Sciences et de leurs applications, tom 2, numéro 3, 1949, pp 197-224, PERSEE*.

THIENARD J. C. (2000). Les transformations en Géométrie : Introduction à une approche historique, *repères IREM, Numéro 63*

UE2 : CHAACHOUA (2007), COURS M2 : *La problématique écologique*. Document non publié.

VITTORI T. (2009). Les notions d'espace en géométrie : De l'Antiquité à l'Âge Classique. *Collection Acteurs de la Science, L'Harmattan*.