Kirsi Jean-Pierre Douamba, Sompidyan Honore Nanema

APPRENTISSAGE DE LA RACINE CARREE EN CLASSE DE TROISIEME AU BURKINA FASO : ANALYSE DES DIFFICULTES DES ELEVES

Résumé

Les élèves de la classe de Troisième du post-primaire au Burkina Faso éprouvent des difficultés dans l'apprentissage de la racine carrée d'un nombre réel positif. Dans une démarche de recherche à la fois qualitative et quantitative, ces difficultés ont été mises en évidence à partir de l'analyse d'un « questionnaire-enseignant », d'un « questionnaire-élève » et d'un test administré aux élèves. Les faibles taux enregistrés aux questions relatives à la racine carrée d'un réel positif et les erreurs relevées dans les productions des élèves sont la manifestation des difficultés de ces derniers. Ils ont des conceptions erronées sur la racine carrée d'un nombre réel positif.

Mots clés *:* Mathématiques, apprentissage, racine carrée, difficultés, erreurs.

Abstract

Pupils in the third post-primary class in Burkina Faso have difficulty learning the square root of a positive real number. In a research approach that is both qualitative and quantitative, these difficulties have been highlighted from the analysis of a "teacher-questionnaire", a "pupil-questionnaire" and a test administered to the pupils. The low rates recorded for questions relating to the square root of a positive real number and the errors noted in the pupils' productions are the manifestation of the difficulties of the latter. They have misconceptions about the square root of a positive real number.

Keywords*:* Mathematics, learning, square root, difficulties, errors.

Introduction

Les élèves et les étudiants rencontrent d'énormes difficultés en mathématiques. Ils y connaissent des échecs importants (Douamba, 1999, Sawadogo, 2014). Par exemple, ils montrent des difficultés dans l'apprentissage de la démonstration en géométrie (Douamba, 2019). En calculs numériques, des études menées par des chercheurs révèlent, d'une part des erreurs commises par des élèves sur la factorisation des expressions polynomiales en classe de 3ème (10ème année de scolarité) au Burkina Faso (Sawadogo, Douamba & Zida, 2017) et d'autre part, des conceptions erronées sur la racine carrée par des élèves de 3ème au Mali (Bronner, 1997). L'utilisation des nombres qui s'écrivent avec le symbole « √ » semble les désorienter. Ces erreurs commises sont la manifestation d'une profonde incompréhension de leur part. Il est évident que si nous parvenons à déterminer pourquoi les élèves font des erreurs, alors nous serons en mesure de les aider à surmonter leur confusion. Pour mieux appréhender ces erreurs, la présente recherche se propose d'analyser les erreurs commises par les élèves de troisième sur la racine carrée.

1. Problématique

La racine carrée d'un réel positif est introduite dans le programme[1] de mathématiques en classe de 3ème du post-primaire (10ème année de scolarité) au Burkina Faso. Les contenus d'enseignement-apprentissage portent sur la définition et les propriétés de la racine carrée, sur des calculs et des encadrements d'expressions mathématiques contenant des radicaux. Il s'agit de familiariser l'élève à la notion de racine carrée d'un réel positif.

La connaissance des nombres générés par les racines carrées et la maitrise de toutes les opérations sur les racines carrées sont indispensables aux élèves dans leur cursus scolaire. En effet, l'apprentissage de la racine carrée se poursuit au secondaire[2].

Cependant, les élèves éprouvent des difficultés lors de son apprentissage. Les constats empiriques sortis de nos expériences personnelles (expérience d'élèves, expérience d'enseignants de mathématiques au post-primaire et au secondaire) attestent que les élèves de 3ème rencontrent des difficultés dans l'acquisition des savoirs et savoir-faire sur la racine carrée. En tant qu'élèves,

[1] Arrêté n°2009-308/MESSRS/SG/DGIFPE/DI/IM du 19 octobre 2009 portant application des nouveaux programmes de mathématiques en classe de 6ème, 5ème, 4ème et 3ème dans l'enseignement général post-primaire. Burkina Faso.
[2] Programmes de mathématiques des classes du secondaire au Burkina Faso.

nous avons éprouvé au même titre que nos camarades de classe, des difficultés dans la manipulation d'exercices portant sur la racine carrée. En tant qu'enseignants, les évaluations que nous faisions sur cette notion ne donnaient pas de bons résultats. Plus concrètement, pour corroborer ces constats empiriques, nous avons consulté des copies à l'épreuve de mathématiques du premier tour du BEPC[3] de la session 2019. Sur 380 copies, 127 (soit 33,42 %) portent une bonne réponse à l'exercice suivant : « *Soit* $A=3\sqrt{12}-2\sqrt{75}-4\sqrt{3}$. *Ecrire A sous la forme* $a\sqrt{b}$ *où* $a\epsilon\mathbb{Z}$ *et* $b\epsilon\mathbb{N}$ ». 66,58 % des élèves n'ont donc pas pu accomplir correctement la tâche. Pourquoi des élèves de 3ème éprouvent-ils des difficultés dans l'apprentissage de la racine carrée ? Notre investigation consiste à comprendre, entre autres, davantage les erreurs et les représentations des élèves sur la racine carrée.

2. Obstacles, erreurs et représentations dans les apprentissages scolaires

Les expressions « difficultés », « obstacles », « erreurs » et « représentations » sont particulièrement évoquées dans l'apprentissage des mathématiques. Mais, avant de venir à ces expressions, nous définissons le concept « racine carrée ».

Un concept mathématique est un triplet {S, I, s} où « S » désigne l'ensemble des situations donnant du sens au concept (le *référent*), « I » désigne l'ensemble des invariants (définition, propriétés…) sur lesquels se fonde la capacité opérationnelle de schèmes (le *signifié*) et « s » est l'ensemble des formes langagières et non langagières permettant de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (*le signifiant*) (Vergnaud, 1990).

Le concept de racine carrée prend sa signification dans un ensemble de situations et de nombreuses notions qui lui sont reliées. Dans le cadre numérique, comme c'est le cas essentiellement en classe de 3ème au Burkina Faso, les propriétés et algorithmes rattachés au concept de racine carrée sont entre autres :

- pour tout réel positif a, il existe un unique réel positif b tel que $b^2 = a$; b est noté $\sqrt{a}$;
- si $a > 0$, il existe aussi un unique réel négatif c tel que $c^2 = a$ et $c = -\sqrt{a}$;

[3] BEPC : Brevet d'Etude du Premier Cycle (c'est le diplôme de l'examen sanctionnant la fin du cycle post-primaire de l'enseignement secondaire général au Burkina Faso

- si $a < 0$, il n'existe pas de réel b tel que $b^2 = a$;
- $(\sqrt{a})^2 = a$ pour tout réel positif a ;
- $\sqrt{a^2} = |a|$, pour tout réel a ;
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour tous réels a et b positifs ;
- Si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ pour tous réels a et b positifs.

En ce qui concerne l'ensemble des représentations, signes, symboles et mots qui permettent de représenter le concept de racine carrée, nous retenons les éléments ci-après :

- $\sqrt{}$ est un symbole spécifique appelé « radical » de la racine carrée ; $\sqrt{a}$ est une désignation en langage symbolique de la racine carrée de « a » ;
- les courbes représentatives de la fonction « carrée » et de la fonction « racine carrée » ;
- tout tableau de nombres correspondant à l'opérateur « carré » ou « racine carrée ».

La complexité du champ conceptuel de la racine carrée laisse alors entrevoir de nombreuses difficultés quant à son enseignement et à son apprentissage. Une difficulté est une condition, un caractère d'une situation qui accroît de façon significative la probabilité de non réponse ou de réponse erronée des sujets actants (élèves ou enseignants) impliqués dans cette situation (Brousseau, 1986, 2003). Ainsi les difficultés peuvent être observées, soit à travers la répétition des actions d'un même individu dans une situation donnée, soit à travers un ensemble de réponses simultanées de groupes de sujets considérés comme suffisamment comparables et soumis aux variantes de la situation. Dans notre étude, il faut comprendre une difficulté d'apprentissage par une difficulté rencontrée par un élève lors de la résolution d'un exercice portant sur la racine carrée. Les difficultés d'apprentissage se manifestent par des obstacles et des erreurs.

Avec les pédagogies nouvelles et l'ascension de la didactique, l'erreur a désormais un intérêt particulier dans l'apprentissage scolaire. Pour Guy Brousseau (1983) (cité par Charnay & Mante, 1991 ; pp.40-41)

> « L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard (...), mais l'effet d'une connaissance

> antérieure qui avait son intérêt, ses succès, mais qui, maintenant, se révèle fausse, ou simplement inadaptée ».

Il y a donc « erreur » parce qu'il y a un processus cognitif à l'œuvre. L'analyse des erreurs contribue donc à l'amélioration des apprentissages scolaires. L'apprentissage ne peut être efficace et profitable aux élèves si l'enseignant ne sait pas analyser les erreurs, déterminer leurs causes et prévoir la voie à suivre pour en remédier.

Des obstacles sont à l'origine de certaines erreurs des élèves. On distingue essentiellement en didactique des mathématiques des obstacles d'origine ontogénique, didactique et épistémologique. Guy Brousseau (1983) ne formule pas les obstacles en termes de difficulté, d'incompréhension ou de manque de connaissances. Pour lui, l'obstacle relève d'une connaissance, et c'est ce qui le distingue d'une difficulté. Cette connaissance possède un domaine de validité et d'efficacité, et elle est de plus résistante à l'enseignement et à l'apprentissage.

Des représentations erronées qu'un élève a d'une notion génèrent également des erreurs. Elles sont généralement considérées comme des systèmes de connaissances qu'un sujet mobilise spontanément face à une question ou un problème, que ceux-ci aient ou non fait l'objet d'un apprentissage (Reuter, Cohen-Azria, Daunay, Delcambre, & Lahanier-Reuter, 2007). Elles renvoient à des façons particulières de raisonner qui se réfèrent à un modèle explicatif préexistant aux apprentissages formels. Elles correspondent aux conceptions d'un individu sur un objet ou une situation.

Guy Brousseau décrit une conception comme

> « un ensemble de règles, de pratiques, de savoirs qui permettent de résoudre une classe de situations et de problèmes de façon à peu près satisfaisante, alors qu'il existe une autre classe de situations où cette conception échoue, soit qu'elle suggère des réponses fausses, soit que les résultats sont obtenus difficilement et dans des conditions défavorables » (1986, p.5).

Michèle Artigue (1988) caractérise, pour sa part, une conception par une classe des situations-problèmes donnant du sens au concept, un ensemble des signifiants associés (images mentales, représentations, expressions symboliques) et des outils (règles d'action, théorèmes-en-acte, algorithmes) dont l'actant dispose pour manipuler le concept.

La compréhension des obstacles et des représentations aide à l'amélioration des performances des élèves. En effet, l'analyse d'une erreur permet de cibler les difficultés des élèves, et ces derniers apprennent par le franchissement des obstacles.

Pour appréhender les difficultés des élèves en classe de 3ème sur la racine carrée, Bronner (1997) est parti du fait que la racine carrée présentait un obstacle épistémologique auquel les élèves seraient confrontés lors de son apprentissage. Il réalise des tests qui lui ont permis d'élaborer une typologie des rapports des élèves à la racine carrée et aux nombres comprenant cinq modèles : (1) le modèle carré parfait où les élèves acceptent la racine carrée du nombre donnant un nombre entier, un nombre décimal ou un quotient d'entiers écrits sous forme fractionnaire ; (2) le modèle formel où la racine carrée d'un nombre positif « a », est perçue comme une expression formelle ou un artifice de calcul utilisé dans une transformation algébrique ; (3) le modèle carré parfait et négatif ($\sqrt{-a}$, « a » un nombre positif et un carré parfait) ; (4) le modèle approximation où l'élève fait la différenciation entre les valeurs exactes et les valeurs approchées, mais il remplace toujours $\sqrt{a}$ par une valeur approchée décimale quand « a » n'est pas un carré parfait ; (5) le modèle conception nombre où les quotients d'entiers et les racines carrées des rationnels positifs sont considérés comme des nombres.

Les erreurs des élèves dans l'apprentissage de la racine carrée seraient la manifestation des difficultés qu'ils éprouvent. Quels types de difficultés ont les élèves de 3ème dans l'apprentissage de la notion de racine carrée au Burkina Faso ?

3. Méthodologie de recherche

Nous optons pour la méthode mixte dans notre méthodologie de recherche. En effet, nous effectuons une analyse statistique des données recueillies qui nous permet de situer l'ampleur des difficultés rencontrées par les élèves, et une analyse qualitative des informations collectées, notamment sur les erreurs, qui nous permet de clarifier les difficultés des élèves et de proposer des pistes de solutions. Nous avons retenu pour notre collecte des données un « questionnaire-élève » adressé aux élèves de la classe de 3ème, un test administré aux élèves de la classe de 3ème et un « questionnaire-enseignant » adressé aux enseignants de mathématiques. Nous avons retenu des enseignants tenant ou ayant tenu la classe 3ème, car ils sont au cœur de la problématique des difficultés de l'enseignement-apprentissage des mathématiques.

200 élèves (les mêmes) ont répondu au questionnaire et ont pris part au test. Ils proviennent des établissements scolaires des localités où nous avons administré le « questionnaire-enseignant ». Ils ont été choisis de façon aléatoire par leurs enseignants de mathématiques. Quant aux enseignants, ils sont 48 à avoir rempli le questionnaire. L'analyse des productions des élèves s'est faite sur la base d'indicateurs sur les savoirs et savoir-faire à mettre en œuvre pour traiter adéquatement les items sur la racine carrée d'un nombre réel positif.

Les contenus sur la racine carrée au programme de la classe de $3^{ème}$ au Burkina Faso ont été vus par les élèves soumis au test. En effet, les cours sur lesdits contenus se sont déroulés de mi-novembre 2019 à mi-décembre 2019. Le test s'étant déroulé à la fin du mois de janvier 2020, le temps d'apprentissage semble donc assez conséquent pour une bonne assimilation des contenus enseignés.

4. Analyse et interprétations des résultats

4.1. Types de difficultés dans l'apprentissage de la racine carrée d'un nombre réel positif

Les élèves ont de réelles difficultés dans la réalisation de certaines tâches liées à la racine carrée. Le tableau n° 1 ci-dessous montre des taux qui illustrent notre propos.

Tableau n° 1 : Difficultés des élèves dans l'apprentissage de la racine carrée d'un réel positif

Les élèves de $3^{ème}$ ont des difficultés à :	Sur 200 élèves		Selon 48 enseignants	
	Effectif	Taux	Effectif	Taux
Simplifier des expressions contenant des radicaux	124	62 %	22	45,83 %
Utiliser l'expression conjuguée pour simplifier des écritures	118	59 %	15	31,25 %
Comparer des expressions contenant des radicaux	54	27 %	16	33,33 %
Trouver la valeur approchée de la racine carrée à l'aide d'une table des racines carrées	141	70,5 %	17	35,42 %

Encadrer une expression contenant un radical par deux décimaux à 10^{-n} près à l'aide d'une table des racines carrées	178	89 %	39	81,25 %
Résoudre des équations du type $x^2 = k$	147	73,5 %	30	62,50 %

Source : Notre enquête de terrain

Figure n° 1 : Difficultés des élèves dans l'apprentissage de la racine carrée d'un réel positif

***La figure n° 1 ci-dessous est une traduction du tableau n°**1.*

Légende : Les élèves de 3ème ont des difficultés à :

(a) : simplifier des expressions contenant des radicaux ;
(b) : utiliser l'expression conjuguée pour simplifier des écritures ;
(c) : comparer des expressions contenant des radicaux ;
(d) : trouver la valeur approchée de la racine carrée à l'aide d'une table des racines carrées ;
(e) : encadrer une expression contenant un radical par deux décimaux à 10^{-n} près à l'aide d'une table des racines carrées ;
(f) : résoudre des équations du type $x^2 = k$.

Pour les items (a), (b), (d), (e) et (f), les taux d'appréciation des élèves de leurs difficultés sont nettement supérieurs à ceux de leurs enseignants. Tandis qu'à l'item (c), les élèves pensent qu'ils ont moins de difficultés, contrairement à l'appréciation de leurs enseignants. 73 % des élèves estiment pouvoir comparer des expressions contenant des radicaux.

Les réponses des élèves aux items ouverts sont récapitulées dans le tableau n° 2 ci-après.

Tableau n° 2 : Réponses des élèves de 3ème aux items ouverts du questionnaire

Items	Réponses
Que représente la racine carrée pour toi ?	- Un entier naturel écrit sous un radical. - Le carré d'un nombre. - Le double d'un nombre écrit sous un radical.
Que représente le carré d'un nombre pour toi ?	- Le double d'un nombre. - Deux fois ce nombre. - Un nombre multiplié par deux.
Dans quel cas $\sqrt{a}$ est-il un nombre ?	- Quand $\sqrt{a}$ n'est pas une fraction. - Quand il sort du radical. - Dans le cas des nombres entiers.
La racine carrée est-elle utile pour toi ? Justifie ta réponse.	- Oui, elle est utile pour moi, car elle consiste à faciliter les calculs. - Oui, elle est utile pour moi, car elle permet d'effectuer des calculs de distances. - Oui, elle est utile pour moi, car quand je maîtrise bien la racine carrée, je peux toujours m'en sortir dans les mathématiques. - Oui, car elle nous permet de connaitre la science profonde en math. - Oui, la racine carrée évolue mes connaissances et m'aide à bien réfléchir.
Quelles sont les difficultés que tu rencontres dans l'apprentissage de la racine carrée ?	- Les difficultés que je rencontre lorsque j'apprends la racine carrée est au niveau des comparaisons, l'encadrement et aussi rendre rationnel. - En tout cas je rencontre des difficultés sur l'apprentissage de la racine carrée concernant les calculs. - Je rencontre des difficultés au niveau de la simplification, de la résolution dans ℝ. - Les difficultés que je rencontre sont le calcul de la racine carrée.

Source : Notre enquête de terrain

Ces différentes réponses expliquent certaines difficultés que nous avons observées dans l'analyse ci-dessous des productions des élèves sur le test. Nous rappelons 200 élèves ont pris part au test. Dans le tableau n° 3 et ceux qui suivront, nous notons « réponses » pour désigner les élèves ayant répondu à la question et « réussites » pour désigner ceux ayant trouvé la bonne réponse.

4.2. Confirmation des difficultés par les erreurs récurrentes dans les productions des élèves

Dans l'ordre des exercices proposés aux élèves, nous présentons les taux bruts de réussite aux questions. Ensuite, nous analysons les erreurs récurrentes relevées dans les productions des élèves, à travers quelques extraits de copies, afin de confirmer les difficultés qu'ils ont dans l'apprentissage de la racine carrée.

L'exercice 1 porte essentiellement sur la détermination de la racine carrée d'un nombre et nous avons joué sur la variable « type de nombre sous le radical » (carré d'entier naturel ou non), la variable « nature du nombre sous le radical » (entier naturel, décimal ou rationnel) et la variable « signe du nombre sous le radical », afin d'appréhender les comportements des élèves. Le tableau n° 3 ci-dessous montre les taux de réussite des élèves aux questions de cet exercice.

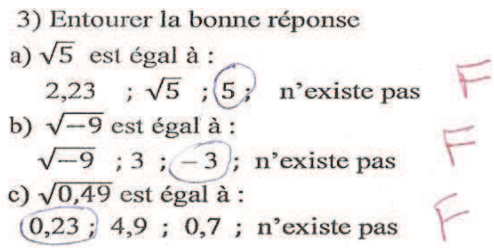
Tableau n° 3 : Résultats des élèves à l'exercice 1

Questions	Répons es	Réussites	Taux de réussites
1) Parmi les nombres suivants, entourer ceux qui ont une racine carrée ? - 63 ; $(-8)^2$; 9 ; 52 ; 16 ; $\frac{16}{25}$; -36 ; $\frac{-4}{9}$; $\frac{2}{3}$; π.	200	3	1,50 %
2) Parmi les expressions suivantes, entourer celles qui sont des nombres : $\sqrt{7}$; $\sqrt{4}$; $\sqrt{-9}$; $\sqrt{\frac{25}{16}}$; $\sqrt{\frac{13}{3}}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{1{,}2}$; $\sqrt{0{,}5}$; $\sqrt{-6{,}4}$; $\sqrt{36}$; $\sqrt{17}$.	196	6	3,06 %
3) Entourer la bonne réponse			
$\sqrt{5}$ est égal à : 2,23 ; $\sqrt{5}$; 5 ; n'existe pas	199	6	3,01 %
$\sqrt{-9}$ est égal à : $\sqrt{-9}$; 3 ; – 3 ; n'existe pas	198	10	5,05 %
$\sqrt{0{,}49}$ est égal à : 0,23 ; 4,9 ; 0,7 ; n'existe pas	199	17	8,54 %
Taux moyen des réussites	4,23 %		

Source : Notre enquête de terrain

Ces taux très faibles de « réussites » indiquent que les élèves ont d'énormes difficultés pour trouver la racine carrée d'un réel. Des erreurs récurrentes dans la distinction des écritures correctes ou incorrectes comportant des radicaux sont fréquentes ; c'est le cas de $\sqrt{a}$ lorsque a négatif. Nous présentons ci-dessous l'extrait n° 1 d'une production d'un élève à la question 3 de l'exercice 1.

Extrait n° 1


3) Entourer la bonne réponse

a) $\sqrt{5}$ est égal à :

2,23 ; $\sqrt{5}$; 5 ; n'existe pas F

b) $\sqrt{-9}$ est égal à :

$\sqrt{-9}$; 3 ; -3 ; n'existe pas F

c) $\sqrt{0{,}49}$ est égal à :

0,23 ; 4,9 ; 0,7 ; n'existe pas F

Dans cet extrait trois erreurs apparaissent. Premièrement, lorsque l'élève trouve que $\sqrt{5}$ est égal à 5, il confond la racine carrée au carré. Cette erreur semble imputable au fait que le radicande 5 n'est pas un carré parfait. Deuxièmement, en commettant l'erreur « $\sqrt{-9}$=-3 », l'élève perçoit « –9» comme un carré parfait. Troisièmement, en écrivant « $\sqrt{0{,}49}$= 0,23 », le raisonnement de cet élève semble être basé sur les relations $0=0^2$, $4=2^2$ et $9=3^2$; soit « $0{,}49=0^2{,}2^23^2= (0{,}23)^2$ ».

Pour certains élèves, les nombres qui ont une racine carrée sont seuls les carrés parfaits (carrés d'entiers et carrés de rationnels). Ils acceptent même les racines carrées des carrés parfaits précédés du signe « - » ; ils recherchent la racine carrée d'un nombre sans comprendre la condition d'existence d'une racine carrée, « le signifié ».

L'exercice 2 concerne essentiellement la comparaison d'expressions contenant des radicaux. Le tableau n° 4 ci-dessous montre les taux de réussite des élèves aux différentes questions de cet exercice.

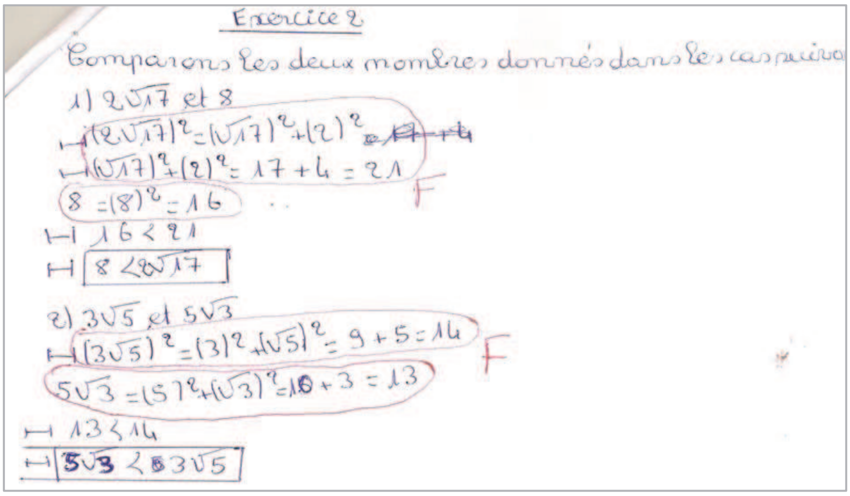
Tableau n° 4* : *Résultats des élèves à l'exercice 2

Comparaison des deux nombres	Réponses	Réussites	Taux de réussites
$2\sqrt{17}$ et 8	196	93	47,45 %
$3\sqrt{5}$ et $5\sqrt{3}$	197	113	57,36 %
Taux moyen des réussites	52,40 %		

Source : Notre enquête de terrain

« Comparer des expressions contenant des radicaux » est un objectif moyennement atteint par les élèves de notre échantillon (52,40 %). Cependant, le calcul des expressions $(\sqrt{a})^2$ et $(a\sqrt{b})^2$ qui interviennent dans certains développements pour la comparaison est une source d'erreur récurrente. L'extrait n° 2 ci-dessous corrobore notre propos.

Extrait n° 2



Exercice 2

Comparons les deux nombres donnés dans les cas suiva

1) $2\sqrt{17}$ et 8

$\vdash (2\sqrt{17})^2 = (\sqrt{17})^2 + (2)^2$ $\cancel{= 17 + 4}$

$\vdash (\sqrt{17})^2 + (2)^2 = 17 + 4 = 21$ F

$8 = (8)^2 = 16$

$\vdash 16 < 21$

$\vdash \boxed{8 < 2\sqrt{17}}$

2) $3\sqrt{5}$ et $5\sqrt{3}$

$\vdash (3\sqrt{5})^2 = (3)^2 + (\sqrt{5})^2 = 9 + 5 = 14$ F

$5\sqrt{3} = (5)^2 + (\sqrt{3})^2 = 10 + 3 = 13$

$\vdash 13 < 14$

$\vdash \boxed{5\sqrt{3} < 3\sqrt{5}}$

L'existence de la racine carrée semble perturber l'élève qui ne sait plus que $(ab)^2 = a^2b^2$; il utilise alors dans son calcul a^2+b^2. Même s'il donne finalement une conclusion juste pour l'item 1) de cet exercice, nous voyons une deuxième erreur dans l'agencement du calcul qui est à la base de cette bonne réponse. Il trouve que $(8)^2 = 16$ à l'item 1) et $(5)^2 = 10$ à l'item 2). Il confond « carré » et « double » d'un nombre. Cette situation confirme la représentation que des élèves ont du carré d'un nombre (cf. tableau n° 2 ci-dessus).

L'exercice 3 porte sur la simplification d'une expression contenant un radical. Nous l'avons subdivisé en trois questions dont chacune traite d'un contenu spécifique. Le tableau n° 5 ci-dessous donne les taux de réussite par question.

Tableau n° 5 : Résultats des élèves à l'exercice 3

Questions	Expressions / Propositions	Réponses	Réussites	Taux de réussites
Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible.	A	186	40	21,50 %
	B	180	8	4,44 %
Donner une écriture simplifiée de D sous la forme $a + b\sqrt{c}$ où $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{N}$	D	148	4	2,70 %
Répondre par vrai ou faux	P	192	88	45,83 %
	Q	194	82	42,27 %
	R	196	48	24,49 %
Taux moyen des réussites		23,54 %		

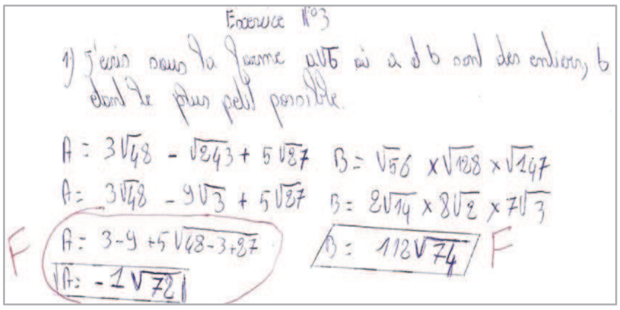
A=$3\sqrt{48} - \sqrt{243} + 5\sqrt{27}$; B= $\sqrt{56} \times \sqrt{128} \times \sqrt{147}$; D=$\sqrt{(3 - 2\sqrt{5})^2}$.

P : $\sqrt{1681} = \sqrt{1600} + \sqrt{81}$; Q : $\sqrt{169 - 144} = \sqrt{169} - \sqrt{144}$; R : $\sqrt{49 - 25} = 2\sqrt{6}$.

Source : Notre enquête de terrain

Ces résultats sont en deçà des attentes avec le taux moyen de réussite de 23,54 %. La difficulté majeure est l'application de la règle sur la racine carrée et valeur absolue. L'erreur récurrente est que les élèves effectuent le développement et la réduction de l'expression sous le radical. Nous présentons ci-dessous les extraits n° 3, n° 4 et n° 5 de productions d'élèves.

Extrait n° 3


Exercice N°3

1) J'ecris sous la forme a√b où a et b sont des entiers, b dont le plus petit possible.

$A = 3\sqrt{48} - \sqrt{243} + 5\sqrt{87}$ $B = \sqrt{56} \times \sqrt{128} \times \sqrt{147}$

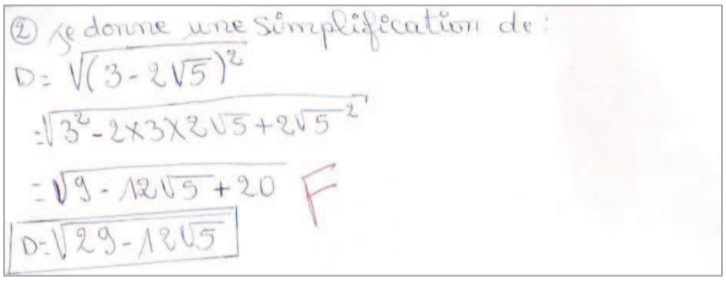
$A = 3\sqrt{48} - 9\sqrt{3} + 5\sqrt{87}$ $B = 2\sqrt{14} \times 8\sqrt{2} \times 7\sqrt{3}$

F $A = 3 - 9 + 5\sqrt{48 - 3 + 87}$ $\boxed{B = 112\sqrt{74}}$ F

$\boxed{A = -1\sqrt{72}}$

Dans la transformation de l'expression A, l'élève semble méconnaitre l'existence de la multiplication dans les expressions $3\sqrt{48}$, $9\sqrt{3}$ et $5\sqrt{27}$. Il effectue un regroupement des nombres qui ne sont pas sous des radicaux et ceux qui sont sous des radicaux. En regroupant et en faisant la somme des nombres sous les radicaux, il considère la racine carrée comme une opération linéaire. Aussi, il ignore qu'il peut écrire 72 sous forme de produit de facteurs et poursuivre le travail. Dans l'expression B, une erreur est intervenue dans le calcul (14×2×3= 84). Des erreurs de calculs élémentaires semblent aussi compromettre les réussites des élèves.

Extrait n° 4


② Je donne une simplification de :

$D = \sqrt{(3-2\sqrt{5})^2}$

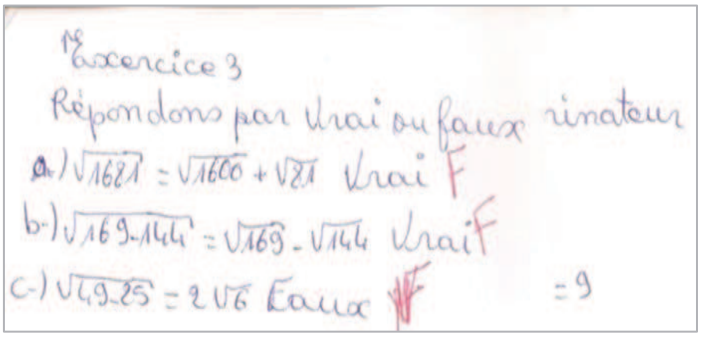
$= \sqrt{3^2-2\times3\times2\sqrt{5}+2\sqrt{5}^2}$

$= \sqrt{9-12\sqrt{5}+20}$ F

$\boxed{D = \sqrt{29-12\sqrt{5}}}$

Dans cet extrait, l'erreur est due au fait que l'élève développe systématiquement $(3-2\sqrt{5})^2$. Il n'applique pas la règle sur la racine carrée et la valeur absolue.

Extrait n° 5


1ère Exercice 3

Répondons par vrai ou faux rinateur

a.) $\sqrt{1681} = \sqrt{1600} + \sqrt{81}$ Vrai F

b-) $\sqrt{169-144} = \sqrt{169} - \sqrt{144}$ Vrai F

c-) $\sqrt{49-25} = 2\sqrt{6}$ Faux F $= 9$

Dans cet extrait, les erreurs en a) et en b) sont dues au fait que l'élève confond « racine carrée d'une somme » et « somme de racines carrées ». En c), l'erreur commise semble être due au fait que cet élève tenait à voir encore une écriture de la forme $\sqrt{49-25}=\sqrt{49}-\sqrt{25}$ pour noter « vrai ».

L'exercice 4 porte essentiellement sur les opérations avec les radicaux. Le tableau n° 6 montre les différents taux de réussite des élèves à cet exercice.

Tableau n° 6 : Résultats des élèves à l'exercice 4

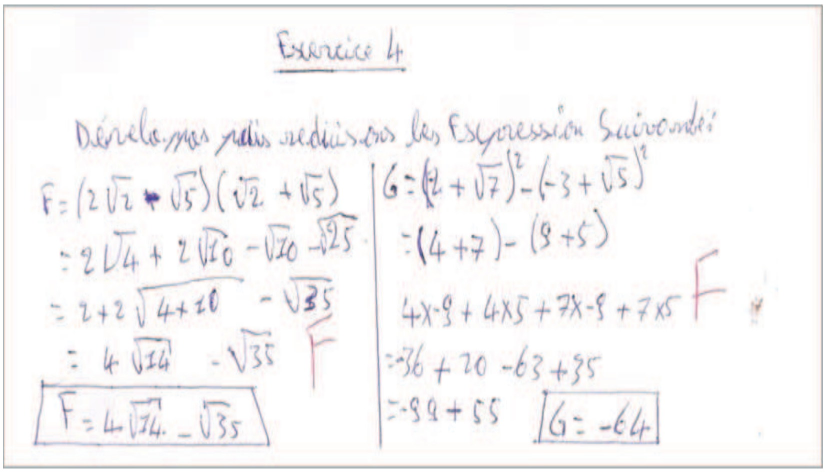
Questions (développer et réduire F et G)	Réponses	Réussites	Taux de réussites
F	191	22	11,52 %
G	184	12	06,52 %
Taux moyen des réussites	9,02 %		

$F = (2\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5})$; $G = (2 + \sqrt{7})^2 - (-3 + \sqrt{5})^2$.

Source : Notre enquête de terrain

Le résultat n'est pas satisfaisant, car le taux moyen de réussite de 9,02 %. Les difficultés des élèves sont liées à la non maitrise des techniques de calcul littéral dans le développement et la réduction. L'erreur récurrente est une mauvaise utilisation des identités remarquables ; ce qui se traduit par des résultats erronés comme $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Nous présentons ci-dessous l'extrait n° 6 de la production d'un élève.

Extrait n° 6



Pour le calcul de F, l'élève écrit : $2\sqrt{4} + 2\sqrt{10}$-$\sqrt{10}$-$\sqrt{25}$ = $2\times2\sqrt{4\times10}$-$\sqrt{35}$. Il commet une erreur, car il réduit mal la somme algébrique contenant des radicaux. Quant au calcul de G, il trouve que $(4 + \sqrt{7})^2$=4+7 et que (-3+$\sqrt{5}$)^2=9+5. En observant ce dernier résultat, nous constatons que cet élève ne parvient pas à appliquer l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Il ne maitrise pas les techniques de calcul littéral dans le développement et la réduction.

L'exercice 5 porte essentiellement sur la simplification d'expressions en utilisant l'expression conjuguée. Le tableau n° 7 montre les taux de réussite des élèves à cet exercice.

Tableau n° 7 : Résultats des élèves à l'exercice 5

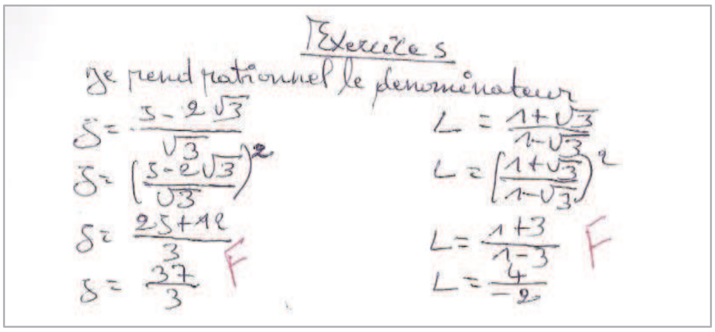
Questions (rendre rationnel le dénominateur)	Réponses	Réussites	Taux de réussites
J	177	21	11,86 %
L	182	27	14,83 %
Taux moyen des réussites	13,34 %		

$J = \frac{5-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; $L = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$.

Source : Notre enquête de terrain

Le taux moyen de réussite à cet exercice est de 13,34 %. Au regard de ce taux, nous pouvons affirmer que les élèves éprouvent des difficultés réelles dans l'écriture d'un quotient sans radical au dénominateur. L'erreur récurrente réside au fait que les élèves ne multiplient pas le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur. Nous présentons ci-dessous l'extrait n° 7 de la production d'un élève.

Extrait n° 7


Exercice 5

Je rend rationnel le dénominateur

$J = \frac{5-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ $L = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

$J = \left(\frac{5-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2$ $L = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)^2$

$J = \frac{25+12}{3}$ F $L = \frac{1+3}{1-3}$ F

$J = \frac{37}{3}$ $L = \frac{4}{-2}$

Dans cet extrait, deux erreurs apparaissent. Premièrement, l'élève ne multiplie pas le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur, mais il élève au carré les expressions de J et L. Deuxièmement, il commet une erreur dans l'application des produits remarquables lorsqu'il écrit J = $(\frac{5-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}})^2 = \frac{25+12}{3}$ et L=$(\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}})^2 = \frac{1+3}{1-3}$.

L'exercice 6 consiste essentiellement à la résolution d'équations comportant des racines carrées. Le tableau n° 8 montre les taux de réussite des élèves à cet exercice.

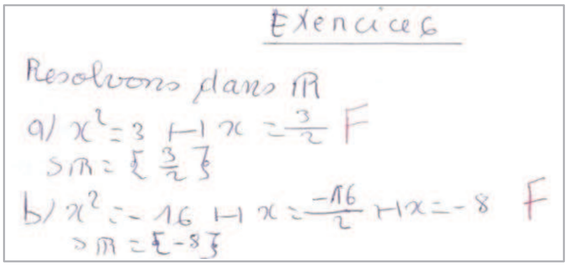
Tableau n° 8 : Résultats des élèves à l'exercice 6

Questions		Réponses	Réussites	Taux de réussites
Résoudre dans ℝ	a) $x^2 = 3$	180	32	17,78 %
	b) $x^2 = -16$	172	27	15,70 %
	c) $x^2 = \frac{49}{144}$	157	29	18,47 %
	d) $2x-3 = -5x+7$	188	112	59,57 %
	e) $x + \sqrt{2} = \sqrt{3}$	177	27	15,25 %
Existe-t-il un carré d'aire 13 cm^2 ? Justifier		156	2	1,90 %
Taux moyen des réussites		21,44 %		

Source : Notre enquête de terrain

Le taux moyen de réussite à cet exercice est de 21,44 %. Les difficultés des élèves dans la résolution des équations sont à des degrés divers selon l'item. Ils ont plus de facilité à résoudre les équations ne contenant pas des radicaux (59,57 % de réussite pour d)) et montrent des difficultés dans celles contenant une racine carrée (15,25 % pour e)). Nous présentons ci-dessous les extraits n° 8, n° 9 et n° 10 de productions d'élèves.

Extrait n° 8


Exercice 6

Resolvons dans IR

a) $x^2 = 3 \longmapsto x = \frac{3}{2}$ F

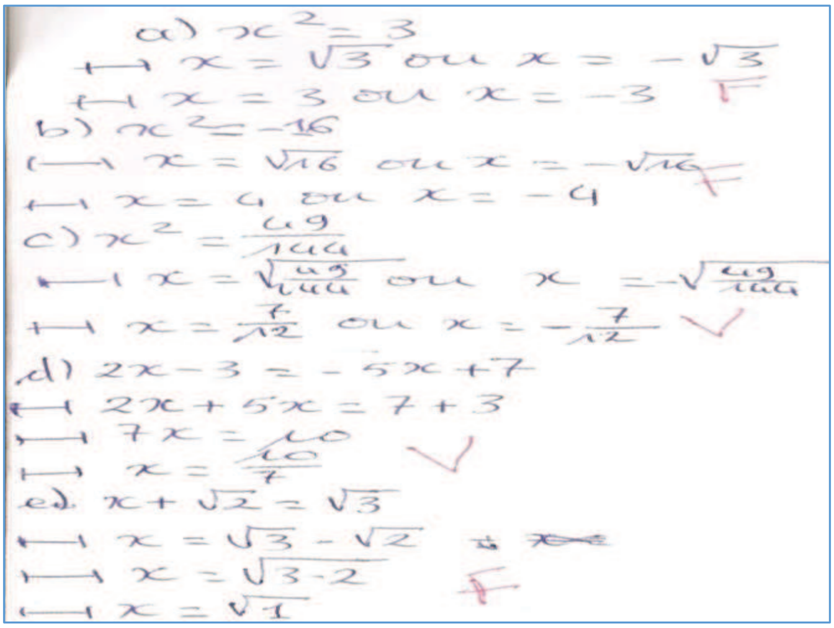
$S_{IR} = \{\frac{3}{2}\}$

b) $x^2 = -16 \longmapsto x = \frac{-16}{2} \longmapsto x = -8$ F

$S_{IR} = \{-8\}$

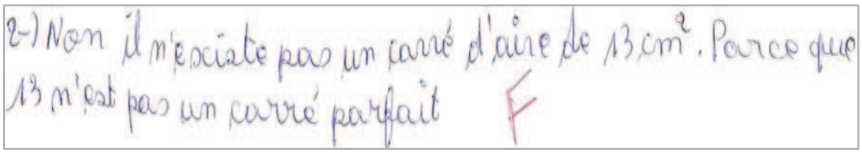
L'extrait n° 8 montre que l'élève fait une confusion entre double et carré. Pour les équations du type x^2 = k, il pense que x^2 est égal à 2 x d'où les écritures de la forme x^2 = k ↔ $2x$ = k.

Extrait n° 9


a) $x^2 = 3$
$\longmapsto x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$
$\longmapsto x = 3$ ou $x = -3$ F
b) $x^2 = -16$
$\longmapsto x = \sqrt{16}$ ou $x = -\sqrt{16}$ F
$\longmapsto x = 4$ ou $x = -4$
c) $x^2 = \frac{49}{144}$
$\longmapsto x = \sqrt{\frac{49}{144}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{49}{144}}$
$\longmapsto x = \frac{7}{12}$ ou $x = -\frac{7}{12}$ ✓
d) $2x - 3 = -5x + 7$
$\longmapsto 2x + 5x = 7 + 3$
$\longmapsto 7x = 10$
$\longmapsto x = \frac{10}{7}$ ✓
e) $x + \sqrt{2} = \sqrt{3}$
$\longmapsto x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$
$\longmapsto x = \sqrt{3-2}$ F
$\longmapsto x = \sqrt{1}$

Dans l'extrait n° 9, trois erreurs apparaissent. Premièrement, en écrivant $\sqrt{3} = 3$ *et* -$\sqrt{3}$ = -3, l'élève confond $\sqrt{a}$ et *a* si *a* n'est pas un carré parfait. Deuxièmement, l'erreur de la question 1) b) est due au fait qu'il assimile -16 à un carré parfait. Troisièmement, il semble transférer la règle sur la multiplication ($\sqrt{a \times b}$ = $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$) aux opérations « + et – » lorsqu'il écrit $\sqrt{3}$-$\sqrt{2} = \sqrt{3-2}$ =$\sqrt{1}$.

Extrait n° 10


2-) Non il n'excixte pas un carré d'aire de 13 cm². Parce que 13 n'est pas un carré parfait F

Dans l'extrait n° 10, l'élève trouve qu'il n'existe pas de carré d'aire 13,cm^2 car, 13 n'est pas un carré parfait. Il a assimilé que seules, les racines carrées des carrés parfaits existent.

L'exercice 7 porte sur l'encadrement d'une expression contenant un radical. Le tableau n° 9 ci-dessous montre le taux de réussite des élèves à cet exercice.

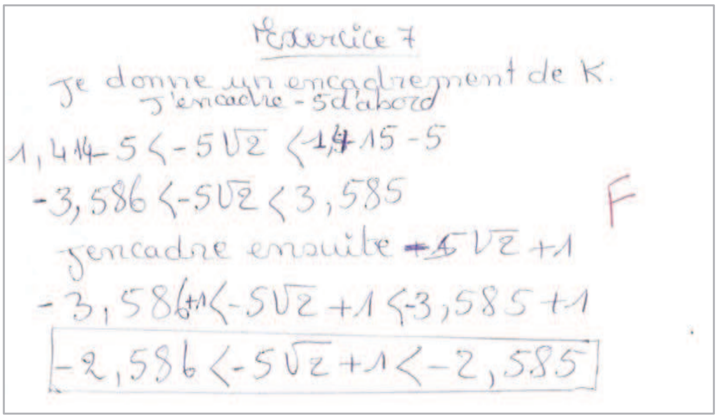
Tableau n° 9 : Résultat des élèves à l'exercice 7

Question	Réponses	Réussites	Taux de réussites
On donne K= $-5\sqrt{2}$+1. Donner un encadrement de K par deux décimaux à 10^{-2} près sachant que 1,414 < $\sqrt{2}$ < 1,415.	146	24	16,44 %

Source : Notre enquête de terrain

Le taux de réussite des élèves à cet exercice est de 16,44 %. Ce faible taux confirme les difficultés des élèves à encadrer une expression contenant un radical. L'erreur récurrente réside dans l'ordre de priorité à donner à la multiplication dans leur calcul. Dans l'extrait n° 11 ci-dessous, l'élève assimile $a\sqrt{b}$ à a+$\sqrt{b}$; serait-il le cas pour ab et a+b ? Nous pensons que la réponse est non ; la racine carrée est la source de cette erreur.

Extrait n° 11


Exercice 7
Je donne un encadrement de K.
J'encadre -5 d'abord
$1,414-5 < -5\sqrt{2} < 1,415-5$
$-3,586 < -5\sqrt{2} < 3,585$
j'encadre ensuite $-5\sqrt{2}+1$
$-3,586+1 < -5\sqrt{2}+1 < -3,585+1$
$\boxed{-2,586 < -5\sqrt{2}+1 < -2,585}$
F

En conclusion, des difficultés ont été répertoriées à partir des déclarations des élèves et des enseignants dans les réponses aux items des questionnaires. Elles ont été par la suite confirmées par l'analyse des erreurs commises par les élèves dans les réponses aux items du test.

5. Discussion

La racine carrée apparait essentiellement comme une variable didactique dans des exercices variés sur les contenus exigibles du programme officiel de la classe de 3ème au Burkina Faso. Cette variable didactique incarnée par le radical et le radicande semble un élément perturbateur de l'appréhension de la notion par l'élève. Le concept de la « racine carrée » (référent, signifié, signifiant) au sens de (Vergnaud, 1991) n'est pas clair au niveau des élèves.

Particulièrement, le « signifié » (définition, propriété…) est source de plusieurs « règles-en-acte ». En effet, premièrement, dans la réponse « $\sqrt{0{,}49}$=0,23 », on penserait que l'élève conçoit $\sqrt{0{,}49}$ comme $\sqrt{0}, \sqrt{4}\sqrt{9}$=0,23 ; cette conception serait une transposition erronée de la propriété $\sqrt{ab}$=$\sqrt{a}\sqrt{b}$. Deuxièmement, certains élèves recherchent la racine carrée d'un nombre sans se soucier de la condition d'existence. Ils acceptent les racines carrées des carrés parfaits précédés du signe « - ». Pour eux, les nombres qui ont une racine carrée sont seuls les carrés parfaits. Troisièmement, pour la simplification de l'écriture$\sqrt{(a-\sqrt{b})^2}$, des élèves commencent par développer $(a-\sqrt{b})^2$ sans penser à l'utilisation de la propriété sur la racine carrée et la valeur absolue. Cinquièmement, des élèves confondent « racine carrée d'une somme » et « somme de racines carrées » ($\sqrt{a+b}$= $\sqrt{a}$- $\sqrt{b}$). Ils transféreraient la règle sur la multiplication ($\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$) aux opérations « + » et « – ». Sixièmement, des élèves assimilent $a\sqrt{b}$ à a+$\sqrt{b}$ dans des calculs ; l'existence du symbole de la racine carrée a perturbé ces élèves. Septièmement, des élèves font une confusion entre double et carré. Dans les équations du type x^2 = k, il pense que x^2 est égal à 2 x d'où les écritures de la forme x^2 = k $\leftrightarrow$ $2x$ = k.

Ces conceptions erronées manifestées par plusieurs élèves surviennent après l'enseignement-apprentissage sur la notion de racine carrée. Au Burkina Faso, les pratiques des classes conseillées sont celles issues de conceptions socioconstructivistes de l'apprentissage. Elles intègrent la gestion des erreurs commises par les élèves. Le mode de gestion des erreurs (Roditi, 2003, 2005) lors des pratiques de classe des enseignants ne semble pas permettre à l'élève de s'affranchir des obstacles et des conceptions erronées.

Conclusion

Cette étude sur l'apprentissage de la racine carrée d'un nombre réel positif en classe de 3ème au Burkina Faso a permis de déceler des difficultés des élèves. Les items ouverts et les items fermés qui ont été administrés aux élèves de 3ème ont permis de faire une typologie de ces difficultés. Des erreurs commises, nous relevons que les élèves ne parviennent pas à reconnaitre la racine carrée comme nombre, reconnaître que la racine carrée d'un nombre réel négatif n'existe pas, donner du sens à la racine carrée, identifier des expressions contenant des radicaux correctes ou incorrectes, simplifier une écriture comportant un radical, percevoir la racine carrée comme un nombre, effectuer une factorisation, un développement et une réduction d'expressions comportant des radicaux et déterminer les solutions d'une équation du type x^2=k. Ils font une confusion entre « double et carré », entre « multiplication et addition » et entre « a et $\sqrt{a}$ » (a étant un réel positif).

Les élèves manifestent des conceptions erronées lors de la résolution des exercices sur la racine carrée. Les difficultés constatées seraient essentiellement d'ordre épistémologique et didactique. Une perspective de recherche serait de suivre plusieurs enseignants dans leurs pratiques d'enseignement-apprentissage sur la racine carrée en classe de 3ème afin de comprendre, entre autres, les approches pédagogiques qu'ils privilégient et leurs modes de gestions des erreurs de leurs élèves.

Références bibliographiques

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9(3)*, 281-308.

Bronner, A. (1992). Connaissances d'élèves maliens à propos de la racine carrée. Ecole Normale Supérieure. Bamako-Mali. « Petit x » n° 28 pp.19 à 55,1991-1992.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et problèmes en mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques, 4(2), 165-198. https://revue-rdm.com/1983/les-obstacles-epistemologique-et/ Consulté le 16 septembre 2019.

Brousseau, G. (1986). *Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique*. (Version 1-10 septembre 2010). Montréal, Canada.

Brousseau, G. (2003). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques.

Brousseau, G. (2011). Erreurs, difficultés, obstacles. guy-brousseau.com/wp-content/upoads/2011/04/03-7f-Difficultés-et-obstacles.pdf. Consulté le 17 juin 2019.

Charnay, R. & Mante, M. (1991). De l'analyse d'erreurs en mathématiques aux dispositifs de re-médiation : quelques pistes. « Grand ℕ », n°48, pp 37 à 64, 1990-1991.

Douamba, K. (1999). *Echec en mathématiques au Burkina Faso : approche de quelques causes en classe de sixième.* . Mémoire de fin de formation à la fonction d'inspecteur de l'enseignement secondaire. Option : Mathématiques.

Douamba, K. J.-P., (2019). Difficultés dans l'apprentissage de la démonstration en géométrie : cas de futurs enseignants du post-primaire au

Burkina Faso. In K. Traoré, J.-C. Bationp, M. Kyélem, A. Diabaté, T. Sawadogo. *Didactique des disciplines en Afrique francophone : entre émergence et confirmation.* (pp 193-204). L'Harmattan Burkina Faso.

Reuter, Y. é., Cohen-Azria, C., Daunay, B., Delcambre, I., & Lahanier-Reuter, D. (2007) *Dictionnaire des concepts fondamentaux des didactiques*. De Boeck.

Roditi, É. (2003). Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 23, n° 2*, pp. 183-216.

Roditi, É. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique*. L'Harmattan.

Sawadogo, T. (2014). *Transition secondaire/ supérieur : Causes d'échec en Mathématiques dans les filières scientifiques de l'Université de Ouagadougou.* Thèse de Doctorat unique en sciences de l'éducation. Centre de Pédagogie Universitaire. Laboratoire interdisciplinaire de didactique des disciplines. Université de Koudougou.

Sawadogo, T., Douamba, K. J.-P., Zida, H. (Juillet 2017). Factorisation d'expressions polynomiales en classe de Troisième : Analyse d'erreurs d'élèves au Burkina Faso. *Liens Nouvelle, Revue de la Faculté Des Sciences et Technologies de l'Education et de la Formation*, 1, 134-143.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(2-3)*, 133-177.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des mathématiques, 10*(135-169).